Noora Rakeva

MATRIISIN ASTE JA LINEAARISTEN YHTÄLÖRYHMIEN RATKAISUJEN OLEMASSAOLO

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Kandidaattitutkielma
Lokakuu 2020

Tiivistelmä

Noora Rakeva: Matriisin aste ja lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisujen olemassaolo
Kandidaattitutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma
Lokakuu 2020

Tutkielman tarkoituksena on esitellä matriisin asteen ja lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisujen olemassaolon yhteys. Edellytyksenä tekstin ymmärtämiselle lukijan tulee hallita lineaarialgebran perusteet, kuten matriisin tarkka määritelmä ja yhtälöryhmän käsite. Hyödyllistä on, jos lukija ymmärtää myös vektoriavaruuksien ominaisuuksia, kuten vektoreiden lineaarisen riippuvuuden merkityksen.

Työssä lähdetään liikkeelle esittelemällä käsitteitä, jotka auttavat pääaiheen tarkastelemisessa. Aloitetaan kertomalla, kuinka alkeismatriisi muodostuu identiteettimatriisista, jolle on tehty jokin yksi tutkielmassa esitellyistä rivioperaatioista. Käydään myös läpi matriisin saattaminen redusoituun porrasmatriisimuotoon rivioperaatioiden toteuttamisella alkuperäiselle matriisille ja määritellään, milloin augmentoitu matriisi on redusoidussa porrasmatriisimuodossa. Tämän jälkeen tutustutaan vektoriavaruuksiin ja tarkemmin vielä rivi- ja sarakeavaruuksiin. Todetaan, että jonkin vektoriavaruuden aliavaruuden virittävien vektoreiden ollessa rivivektoreita, kyseistä viritettyä aliavaruutta kutsutaan riviavaruudeksi. Samanlainen tarkastelu toteutetaan sarakevektoreille, jolloin saadaan määriteltyä sarakeavaruus. Näiden määritelmien jälkeen todistetaan, että rivi- ja sarakeavaruuksien dimensiot ovat aina samat.

Matriisin astetta käsitellään determinanttiasteen, riviasteen ja sarakeasteen avulla, mutta tavasta riippumatta tulos on sama. Todetaan matriisin determinanttiasteen olevan hyödyllinen, mutta matriisin kokoa kasvatettaessa sen etsiminen osoittautuu usein tehottomaksi. Tästä syystä usein hyödynnetään rivi- tai sarakeastetta. Määritellään matriisin riviaste sen riviavaruuden dimensiona ja sarakeaste vastaavasti sarakeavaruuden dimensiona. Todistetaan myös determinanttiasteen olevan sama kuin matriisin lineaarisesti riippumattomien rivien määrä.

Viimeisessä luvussa rakennetaan ymmärrystä matriisien yhteydestä lineaarisiin yhtälöryhmiin, jonka jälkeen siirrytään esimerkkien kautta ratkaisujen olemassaoloon. Lopuksi sidotaan aiheet toisiinsa todistamalla yhteys matriisin asteen ja sitä vastaavan lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisujen olemassaolon välillä. Tutkielma on kirjoitettu mukaillen lähdeteoksina käytettyjä Friedbergin, Inselin ja Spencen kirjaa Linear Algebra, Kuttlerin kirjaa Elementary Linear Algebra ja Nicholsonin kirjaa Linear Algebra with Applications.

Avainsanat: Matriisin aste, determinanttiaste, riviaste, sarakeaste, lineaarinen yhtälöryhmä

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

Sisältö

1 Johdanto

Tämän tulkielman aiheena on matriisin aste ja lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisujen olemassaolo. Lähdemme liikkeelle käsitteistä, joita tarvitsemme aiheen tarkastelemiseen ja tutkielman päätteeksi ymmärrämme yhteyden, joka vallitsee matriisin asteen ja sitä vastaavan lineaarisen yhtälöryhmän välillä.

Tutkielman luvussa 2 käymme läpi tarvittavien käsitteiden määritelmiä ja tutustumme hieman vektoriavaruuksiin. Käymme läpi rivi- ja sarakeavaruuksien määritelmät ja tutustumme vektoriavaruuksien lineaariseen riippuvuuteen.

Matriisin astetta ja eri tapoja löytää matriisin aste käsittelemme luvussa 3. Ensimmäiseksi löydämme matriisin asteen matriisin determinantin asteen avulla, jonka jälkeen siirrymme matriisin rivi- ja sarakeasteiden tutkimiseen. Toteamme myös, että matriisin aste on sama riippumatta tavasta, jolla sen laskemme.

Luvussa 4 käymme läpi, miten lineaarinen yhtälöryhmä kirjoitetaan yleisessä muodossa ja miten se muutetaan augmentoiduksi matriisiksi. Tämän jälkeen tarkastelemme lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisujen olemassaoloa ja käymme läpi esimerkin yhtälöryhmän ratkaisemisesta. Lopuksi tarkastelemme matriisin asteen yhteyttä lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisujen olemassaoloon.

Lukijalta edellytämme joidenkin lineaarialgebran perusasioiden hallitsemista. Oletamme muun muassa, että lukija tuntee matriisin tarkan määritelmän sekä yhtälöryhmän käsitteen. Lähdeteoksena käytämme Kuttlerin kirjaa Elementary Linear Algebra, Nicholsonin kirjaa Linear Algebra with Applications ja Friedbergin kirjaa Linear Algebra.

2 Valmistelevia tarkasteluja

2.1 Tarvittavien käsitteiden määritelmiä

Luvussa 2 esitämme käsitteitä ja lauseita, jotka auttavat tarkastelemaan pääaihettamme. Tässä pykälässä esitämme kolme määritelmää: alkeismatriisin, redusoidun porrasmatriisin ja alkeisrivioperaatiot [2, s. 131–139].

2.1.1 Rivioperaatiot ja alkeismatriisi

Alkeismatriisi muodostuu identiteettimatriisista, jolle on tehty jokin seuraavista rivioperaatioista täsmälleen kerran.

Määritelmä 2.1. Rivioperaatioita ovat seuraavat:

1. Matriisin kahden rivin paikan vaihtaminen keskenään.
2. Matriisin rivin kertominen jollakin luvulla.
3. Matriisin rivin korvaaminen itsensä ja toisen rivin monikerran summalla.

Alkeismatriisit määritellään seuraavanlaisesti.

Määritelmä 2.2. Alkeismatriisit koostuvat niistä matriiseista, jotka on saatu tekemällä jokin yksi rivioperaatio identiteettimatriisille. Matriiseja, jotka on saatu rivien paikkaa vaihtamalla, kutsutaan permutaatiomatriiseiksi.

Permutaatiomatriiseja voidaan muodostaa myös yleisluontoisemmin, mutta emme käsittele niitä tässä tutkielmassa.

2.1.2 Redusoitu porrasmatriisi

Matriisin saattaminen redusoituun porrasmatriisimuotoon vaatii rivioperaatioiden toteuttamista alkuperäiselle matriisille. Jokaisella matriisilla on vain yksi mahdollinen redusoitu porrasmatriisimuoto.

Määritelmä 2.3. Augmentoitu matriisi on redusoidussa porrasmatriisimuodossa, jos se toteuttaa seuraavat ehdot:

1. Kaikki nollarivit sijaitsevat matriisin alaosassa.

2. Jokainen johtava alkio sijaitsee sitä yllä olevan rivin johtavan alkion oikealla puolella olevassa sarakkeessa.

3. Jokaisen johtavan alkion ylä- ja alapuolella sijaistevat alkiot ovat nollia.

4. Jokainen johtava alkio on luku 1 ja samassa sarakkeessa ei ole muita nollasta poikkeavia alkioita.

2.2 Vektoriavaruus

Tarkastellaan vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruuksia. Jos aliavaruuden virittävät vektorit ovat rivivektoreita, viritettyä aliavaruutta kutsutaan tällöin riviavaruudeksi. Jos taas aliavaruuden virittävät vektorit ovat sarakevektoreita, niin viritettyä aliavaruutta kutsutaan silloin sarakeavaruudeksi.

2.2.1 Rivi- ja sarakeavaruus

Olkoon A mielivaltainen $m \times n$-matriisi. Tällöin matriisin A rivit ovat vektoreita $\mathbb{R}^n$-avaruudessa ja $\mathbb{R}^n$:n aliavaruus voidaan virittää kysyeisillä vektoreilla. Tätä kutsutaan A:n riviavaruudeksi ja sitä merkitään $\mathrm{row}(A)$. Sarakeavaruus määritellään vastaavasti ja merkitään $\mathrm{col}(A)$. [3, s. 197]

Lause 2.1. *Olkoot A, U ja V $m \times n$-, $p \times m$- ja $n \times q$-matriiseja. Nyt*

1. $\mathrm{col}(AV) = \mathrm{col}(A)$, *jos V on kääntyvä*

2. $\mathrm{row}(UA) = \mathrm{row}(A)$, *jos U on kääntyvä.*

Todistus. Olkoon $V_j = (v_{1j} \;\; v_{2j} \;\; \dots \;\; v_{nj})^T$ matriisin V sarake j ja olkoon C_j matriisin A sarake j. Tällöin matriisin AV sarake j on

$$AV_j = (C_1 \;\; C_2 \;\; \dots \;\; C_n)\begin{pmatrix} v_{1j} \\ v_{2j} \\ \vdots \\ v_{nj} \end{pmatrix} = v_{1j}C_1 + v_{2j}C_2 + \dots + v_{nj}C_n.$$

Täten jokainen matriisin AV sarake j kuuluu matriisin A sarakeavaruuteen, joten $\mathrm{col}(AV) \subseteq \mathrm{col}(A)$. Jos V on kääntyvä, niin äskeisen tiedon nojalla

$$\mathrm{col}(A) = \mathrm{col}[(AV)V^{-1}] \subseteq \mathrm{col}(AV).$$

Täten $\text{col}(A) = \text{col}(AV)$ ja kohta 1 on todistettu.

Nyt kohdan 1 nojalla saadaan

$$\text{col}[(UA)^T] = \text{col}[A^T U^T] \subseteq \text{col}(A^T),$$

josta seuraa, että $\text{row}(UA) \subseteq \text{row}(A)$. Jos U on kääntyvä, niin voidaan kohdan 1 todistuksen nojalla sanoa, että $\text{row}(UA) = \text{row}(A)$ [3, s. 197]. □

Tähän nojautuen voimme todistaa, että millä tahansa matriisilla A, $\text{row}(A)$ ja $\text{col}(A)$ ovat dimensioiltaan samat.

Lause 2.2. *Olkoon A mielivaltainen $m \times n$-matriisi. Nyt*

$$\dim(\text{row}(A)) = \dim(\text{col}(A)).$$

Oletetaan, että A voidaan redusoida porrasmatriisiksi R rivioperaatioilla. Jos r on nollasta eroavien rivien lukumäärä matriisissa R, niin tällöin pätee seuraavat kohdat:

1. *Matriisin R nollasta poikkeavat r-riviä ovat matriisin A riviavaruuden kanta.*

2. *Jos jokainen johtava alkio kuuluu matriisin R sarakkeisiin $j_1, j_2, \dots, j_r$, niin niitä vastaavat matriisin A sarakkeet $j_1, j_2, \dots, j_r$ ovat matriisin A sarakeavaruuden kanta.*

Todistus. Voimme olettaa, että $R = UA$ jollekin kääntyvälle matriisille U [3, s. 65]. Täten A:n riviavaruus on yhtäsuuri kuin R:n riviavaruus, lauseeseen 2.1 nojaten.

Todistaaksemme lauseen 2.2 kohdan 2, olkoot $C_1, C_2, \dots, C_n$ matriisin A sarakkeet. Siis

$$A = (C_1 \;\; C_2 \;\; \dots \;\; C_n)$$

ja

$$R = UA = U(C_1 \;\; C_2 \;\; \dots \;\; C_n) = (UC_1 \;\; UC_2 \;\; \dots \;\; UC_n).$$

Täten kohdan 2 notaatiossa joukko $B = \{UC_{j1}, UC_{j2}, \dots, UC_{j2}\}$ koostuu matriisin R sarakkeista, joissa on johtava alkio, joten B on R:n sarakeavaruuden kanta. Koska U on kääntyvä, niin voimme olettaa joukon $\{C_{j1}, C_{j2}, \dots, C_{jr}\}$ olevan lineaarisesti riippumaton. Lisäksi, jos C_j on A:n jokin mielivaltainen sarake, niin UC_j on B:n sarakkeiden lineaarikombinaatio. Matriisin U kääntyvyys taas osoittaa, että C_j on joukon $C_{j1}, C_{j2}, \dots, C_{jr}$ lineaarikombinaatio. Tämä todistaa kohdan 2.

Lopuksi voimme todeta, että

$$\dim(\text{row}(A)) = r = \dim(\text{col}(A))$$

kohtien 1 ja 2 nojalla [3, s. 198]. □

2.2.2 Lineaarinen riippuvuus

Määritelmä 2.4. Vektoriavaruuden V osajoukko S on lineaarisesti riippuva, jos on olemassa äärellinen määrä joukon S vektoreita $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ ja skalaareita $a_1, a_2, \ldots, a_n$, joista ainakin yksi eroaa nollasta, siten, että

$$a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{u}_n = \mathbf{0}.$$

Tällöin voimme sanoa, että joukon S alkiot ovat lineaarisesti riippuvia.

Mille tahansa vektoreille $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ pätee $a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{u}_n = \mathbf{0}$, jos $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$. Kutsumme tätä nollan triviaaliksi esitysmuodoksi vektoreiden $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ lineaarikombinaationa. Ollakseen lineaarisesti riippumaton joukon S alkioilla on oltava epätriviaali nollan esitysmuoto vektoreiden lineaarikombinaationa. Tästä seuraa, että vektoriavaruuden mikä tahansa osajoukko, joka sisältää nollavektorin, on lineaarisesti riippuva, sillä $\mathbf{0} = 1 \cdot \mathbf{0}$ on nollan epätriviaali esitysmuoto joukon S vektoreiden lineaarikombinaationa [1, s. 35].

Esimerkki 2.1. Olkoon joukko $S \in \mathbb{R}^4$ sellainen, että

$$S = \{(1,3,-4,2),(2,2,-4,0),(1,-3,2,-4),(-1,0,1,0)\}.$$

Jotta voisimme määrittää, onko joukko S lineaarisesti riippuva, meidän pitää etsiä skalaarit a_1, a_2, a_3, a_4, joista ainakin yhden on erottava nollasta, siten, että

$$a_1(1,3,-4,2) + a_2(2,2,-4,0) + a_3(1,-3,2,-4) + a_4(-1,0,1,0) = 0.$$

Löytääksemme tällaisen ratkaisun, meidän on etsittävä nollasta eriävä ratkaisu lineaariselle yhtälöryhmälle

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 + a_3 - a_4 = 0 \\ 3a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0 \\ -4a_1 - 4a_2 + 2a_3 + a_4 = 0 \\ 2a_1 - 4a_3 = 0 \end{cases}.$$

Eräs ratkaisu on muotoa $a_1 = 4, a_2 = -3, a_3 = 2, a_4 = 0$. Siis S on joukon $\mathbb{R}^4$ lineaarisesti riippuva osajoukko. □

Esimerkki 2.2. Olkoon joukko

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 7 & 4 \\ 6 & -2 & -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 3 & 11 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

joukon $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ osajoukko. Nyt S on lineaarisesti rippuva, koska

$$5\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -3 & 7 & 4 \\ 6 & -2 & -7 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -2 & 3 & 11 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

3 Matriisin aste

Matriisin aste voidaan selvittää usealla eri tavalla, mutta tavasta riippumatta tulos on aina sama. Tässä luvussa tutustumme paremmin matriisin asteen selvittämiseen determinanttiasteen, riviasteen ja sarakeasteen avulla [3, s. 198].

3.1 Determinanttiaste

Matriisin determinanttiaste on hyödyllinen, mutta sen löytäminen osoittautuu isommissa matriiseissa usein hyvin tehottomaksi. Determinanttiasteen löytäminen joskus vaatii matriisin jokaisen alimatriisin determinantin tarkastelun. Matriisin koon kasvaessa sen alimatriisien määrä kasvaa. Tästä syystä usein hyödynnetään rivi- tai sarakeastetta.

Määritelmä 3.1. Jos A on $m \times n$-matriisi, niin A:n *determinanttiaste*, jota merkitään $\operatorname{rank}(A)$, on r silloin, kun r on suurin mahdollinen luku siten, että jollakin matriisin A $r \times r$-alimatriisilla on nollasta poikkeava determinantti [2, s. 141].

Esimerkki 3.1. Lasketaan matriisin A determinanttiaste, kun

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Tarkastellaan ensin matriisin A 2×2-kokoisia alimatriiseja ja lasketaan jokaisen determinantti:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 1 \cdot 7 = 5 - 7 = -2,$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 - 1 \cdot 1 = 7 - 1 = 6,$$

$$\det \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 7 \cdot 7 - 5 \cdot 1 = 49 - 5 = 44.$$

Huomataan, että jokainen alimatriisin determinantti on erisuuri kuin 0, joten voidaan todeta $\operatorname{rank}(A) = 2$. Itse asiassa riittää, että yksi näistä determinanteista eroaa nollasta.

Esimerkki 3.2. Lasketaan matriisin A determinanttiaste, kun

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Tarkastellaan 2×2-alimatriiseja ja lasketaan niiden determinantit:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 4 - 4 = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 3 \cdot 4 = 12 - 12 = 0,$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 - 3 \cdot 2 = 6 - 6 = 0.$$

Koska jokaisen 2×2 -alimatriisin determinantti on 0, niin matriisin A aste on pienempi kuin 2.

Seuraavaksi tarkastelemme 1×1 -alimatriiseja. Vähintään yhdellä on determinantti on erisuuri kuin nolla, sillä $\det(1) = 1$, joten

$$\operatorname{rank}(A) = 1.$$

Tästä voimme päätellä, että matriisin asteeksi saadaan nolla vain ja ainoastaan silloin, kun sen kaikkien alimatriisien determinantti on nolla. Jotta jokainen alimatriisi saisi determinantikseen nolla, on jokaisen alimatriisin olatava nollamatriisi ja siten alkuperäisen matriiisin on itse oltava myös nollamatriisi. Tästä saamme alla olevan seurauksen.

Seuraus 3.1. *Olkoon A $m \times n$-matriisi. Silloin*

$$\operatorname{rank}(A) = 0,$$

jos ja vain jos matriisi A on nollamatriisi.

Esimerkki 3.3. Tarkastellaan $m \times m$ -nollamatriisia A. Kun

$$A_{m,m} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

niin

$$\det(A_{m,m}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Olkoon $A_{n,n}$ matriisin $A_{m,m}$ alimatriisi. Tällöin

$$\det(A_{n,n}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Tästä voimme päätellä, että jokaisen $m \times m$ -nollamatriisin $n \times n$ -alimatriisin determinantti on 0. Eli nollamatriisin ollessa neliömatriisi sen aste on aina 0.

3.2 Rivi- ja sarakeaste

Matriisin rivi- ja sarakeasteet käyttäytyvät hyvin toistensa kaltaisesti. Seuraavaksi tutustumme matriisin asteen löytämiseen sen rivi- ja sarakematriisien asteiden avulla.

Määritelmä 3.2. Matriisin A riviaste on A:n lineaarisesti riippumattomien rivien lukumäärä. Eli matriisin A riviaste on A:n riviavaruuden dimensio. Vastaavasti matriisin A sarakeaste on A:n lineaarisesti riippumattomien sarakkeiden lukumäärä. Eli matriisin A sarakeaste on A:n sarakeavaruuden dimensio.

Huomautus. Lauseen 2.2 nojalla riviaste ja sarakeaste ovat yhtäsuuret.

Huomautus. Olkoon matriisin A redusoitu porrasmatriisi R. Tällöin Lauseen 2.2 nojalla A:n aste on R:n nollasta eriävien rivien lukumäärä.

Esimerkki 3.4. Lasketaan matriisin A aste ja etsitään sen rivi- ja sarakeavaruuksien kannat, kun

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 & 4 \\ -9 & 8 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

Matriisi A voidaan saattaa redusoituun porrasmatriisimuotoon seuraavasti:

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 & 4 \\ -9 & 8 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 8 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{5} & \frac{6}{5} & \frac{4}{5} \\ -9 & 8 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 8 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{5} & \frac{6}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & \frac{103}{5} & \frac{59}{5} & \frac{41}{5} \\ 2 & 5 & 8 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{5} & \frac{6}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & \frac{103}{5} & \frac{59}{5} & \frac{41}{5} \\ 0 & \frac{11}{5} & \frac{28}{5} & \frac{-23}{5} \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{5} & \frac{6}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & \frac{59}{103} & \frac{41}{103} \\ 0 & \frac{11}{5} & \frac{28}{5} & \frac{-23}{5} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{5} & \frac{6}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & \frac{59}{103} & \frac{41}{103} \\ 0 & 0 & \frac{447}{103} & \frac{-564}{103} \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{5} & \frac{6}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & \frac{59}{103} & \frac{41}{103} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-188}{149} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{5} & \frac{6}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{167}{149} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-188}{149} \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{5} & 0 & \frac{1724}{745} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{167}{149} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-188}{149} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{111}{149} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{167}{149} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-188}{149} \end{pmatrix},$$

joten $\mathrm{rank}(A) = 3$ ja $\mathrm{row}(A)$:n kanta on $\{(1, 0, 0, \frac{111}{149}), (0, 1, 0, \frac{167}{149}), (0, 0, 1, \frac{-188}{149})\}$. Lisäksi johtavat alkiot ovat sarakkeissa 1, 2 ja 3, joten Lauseen 2.2 nojalla $\mathrm{col}(A)$:n kanta on

$$\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}.$$

Lauseella 2.2 on monia merkittäviä seurauksia yllä esitetyn lisäksi. Alla esitämme seurauksen 3.2, joka seuraa siitä, että A:n rivit ovat lineaarisesti riippumattomia, jos ja vain jos niiden transpoosit ovat lineaarisesti riippumattomia.

Seuraus 3.2. *Olkoon A mielivaltainen matriisi. Nyt*

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^T).$$

Lause 3.1. *Olkoon A $m \times n$-matriisi, jonka determinanttiaste on r. Siis*

$$rank(A) = r.$$

Tällöin matriisissa A on r-määrä lineaarisesti riippumattomia rivejä.

Todistus. Oletetaan, että matriisin $A = (a_{i,j})$ determinanttiaste on r. Tällöin on olemassa $r \times r$-alimatriisi B, jonka $\det(B) \neq 0$ ja jolle ei ole olemassa suurempaa matriisin A neliöalimatriisia, jolla olisi nollasta eriävä determinantti. Olkoon matriisin B sarakkeiden indeksit

$$j_1 < j_2 < \cdots < j_r$$

ja kyseisen matriisin rivien indeksit

$$i_1 < i_2 < \cdots < i_r.$$

Osoitetaan, että jokainen olemassaoleva rivi voidaan esittää näiden rivien lineaarikombinaationa. Nyt

$$B = \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_r j_1} & a_{i_r j_2} & \cdots & a_{i_r j_r} \end{pmatrix}.$$

Kun matriisin B kokoa kasvatetaan, saadaan matriisi, joka on kooltaan $(r+1)\times(r+1)$. Muodostetaan tämä matriisi siten, että lisätään matriisiin B rivi l, jossa $p \in [1,n]$. Näin saadaan

$$\begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_r} & a_{i_1 p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i_r j_1} & a_{i_r j_2} & \cdots & a_{i_r j_r} & a_{i_r p} \\ a_{l j_1} & a_{l j_2} & \cdots & a_{l j_r} & a_{l p} \end{pmatrix},$$

jonka determinantti on 0. Sillä jos $p \notin \{j_1, j_2, \ldots, j_r\}$, niin yllä oleva matriisi olisi A:n alimatriisi ja se on liian iso, jotta sillä voisi olla nollasta eriävä determinantti. Toisaalta jos $p \in \{j_1, j_2, \ldots, j_r\}$, niin yllä olevalla matriisilla olisi kaksi yhtäsuurta riviä ja sen determinantti olisi silloinkin 0.

Muodostetaan yllä olevan matriisin kofaktoriesitys viimeisen sarakkeen suhteen. Olkoon C_k alkion $a_{i_k p}$ kofaktori, joka ei ole riippuva p:n valinnasta, ja C alkion a_{lp} kofaktori, joka on erisuuri kuin nolla, sillä se on matriisin B determinantti. Tällöin

$$0 = a_{lp}C + \sum_{k=1}^{r} C_k a_{i_k p}$$

josta saadaan

$$a_{lp} = \sum_{k=1}^{r} \frac{-C_k}{C} a_{i_k p} \equiv \sum_{k=1}^{r} m_k a_{i_k p}.$$

Tämä on voimassa kaikilla p:n arvoilla ja koska m_k ei riipu p:n arvosta, niin ollaan todistettu matriisiin B lisätyn rivin l olevan rivien $i_1, i_2, \ldots, i_r$ lineaarikombinaatio. [2, s. 156-157] □

Seuraus 3.3. *Lauseen 3.1 nojalla determinanttiaste ja riviaste ovat yhtäsuuret. Siis*

$$\operatorname{rank}(A) = \dim(\operatorname{row}(A)).$$

Lause 3.2. *Olkoon A $m \times n$-matriisi. Tällöin*

$$\dim(\operatorname{row}(A)) = \dim(\operatorname{col}(A)) = \operatorname{rank}(A).$$

Todistus. Lause 3.2 seuraa suoraan lauseista 2.2 ja 3.1. □

Esimerkki 3.5. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tästä nähdään, että matriisin A ensimmäinen ja toinen sarake ovat lineaarisesti riippumattomat ja kolmas sarake on ensimmäisen ja toisen sarakkeen lineaarikombinaatio. Tällöin

$$\operatorname{rank}(A) = \dim(span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}) = \dim(\operatorname{col}(A)) = 2.$$

Tarkastellaan vielä matriisin A astetta determinattiasteen avulla.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot 1 - 0 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) = 0$$

Koska matriisin $\det(A) = 0$, niin siirrytään tarkastelemaan alimatriisien determinantteja. Yllä olevan perusteella nähdään, että 2×2-alimatriisien determinantit ovat 1, -1 ja -1. Koska vähintään yksi näistä alimatriisien determinanteista on erisuuri kuin nolla, niin voidaan todeta matriisin A determinanttiasteen olevan 2.

Siis molemmat tavat johtavat samaan tulokseen, joten nähdään, että

$$\operatorname{rank}(A) = \dim(\operatorname{col}(A)) = 2.$$

4 Lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisujen olemassaolo

Lineaarisella yhtälöryhmällä voi olla yksikäsitteinen ratkaisu, ei ratkaisua ollenkaan tai ääretön määrä ratkaisuja. Tässä tutustumme lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisujen olemassaoloon yhtälöryhmistä muodostettujen matriisien ja niiden asteiden avulla.

4.1 Lineaarisesta yhtälöryhmästä augmentoiduksi matriisiksi

Aluksi käsittelemme matriisin ja lineaarisen yhtälöryhmän yhteyttä. [2, s. 71]

Määritelmä 4.1. Lineaarinen yhtälöryhmä on kokoelma yhtälöitä,

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{gathered}$$

missä a_{ij} ja b_j ovat skalaareja ja $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ovat muuttujia. Yllä olevassa yhtälöryhmässä on m yhtälöä ja se voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \ i = 1, 2, 3, \ldots, m.$$

Yhtälöiden ratkaisemiseksi on löydettävä arvot muuttujille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Lineaarisen yhtälöryhmän saattaminen augmentoiduksi matriisiksi tapahtuu niin, että yksi yhtälö vastaa yhtä riviä. Yleisessä muodossa oleva aiemmin esitetty yhtälöryhmä voidaan siis esittää alla olevan määritelmän tavoin.

Määritelmä 4.2. Lineaarisen yhtälöryhmän yleinen muoto augmentoituna matriisina on

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

4.2 Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisujen olemassaolo

Millä tahansa lineaarisella yhtälöryhmällä on olemassa joko yksi ratkaisu, ei ratkaisua ollenkaan tai ääretön määrä ratkaisuja. Jokaiselle yhtälöryhmälle löytyy ratkaisu siten, että kirjoittaa yhtälöryhmän augmentoituun matriisimuotoon ja tekee rivioperaatioita matriisille niin pitkään, että löytää muodon, joka on helpompi ratkaista. Yleensä tämä muoto on porrasmatriisi tai redusoitu porrasmatriisi. Tämä perustuu siihen, että rivioperaatiot eivät muuta ratkaisujoukkoa. [2, s. 71]

Esimerkki 4.1. Ratkaistaan seuraava yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 5x + 10y - 7z = -2 \\ 2x + 4y - 3z = -1 \\ 3x + 6y + 5z = 9 \end{cases}$$

Yhtälöryhmä voidaan saattaa seuraavaan augmentoituun matriisimuotoon ja suorittamalla rivioperaatioita siitä saadaan seuraavanlainen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 10 & -7 & -2 \\ 2 & 4 & -3 & -1 \\ 3 & 6 & 5 & 9 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{array}\right).$$

Tästä nähdään, että matriisin alin rivi muodostaa yhtälön

$$0x + 0y + 0z = 20,$$

joka ei voi pitää paikkansa, sillä $0 \neq 20$. Joten kyseisellä lineaarisella yhtälöryhmällä ei ole olemassa mahdollisia ratkaisuja.

4.3 Matriisin asteen yhteys lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisujen olemassaoloon

Lineaarinen yhtälöryhmä voidaan kirjoittaa muotoon

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

jossa A on $m \times n$-matriisi, $\boldsymbol{x}$ on $n \times 1$-sarakevektori ja $\boldsymbol{b}$ on $m \times 1$-sarakevektori. Olkoon

$$A = (\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n),$$

jossa vektorit $\boldsymbol{a}_k$ ovat matriisin A sarakkeet. Tällöin $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)^T$ on yhtälöryhmän ratkaisu, jos ja vain jos

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b},$$

jonka mukaan $\boldsymbol{b}$ on vektori, joka virittää avaruuden $(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$. Tämä osoittaa, että yhtälöryhmälle on olemassa ratkaisu jos ja vain jos $\boldsymbol{b}$ kuuluu matriisin A sarakeavaruuteen.[2, s. 154]

Lause 4.1. *Olkoon A eräs $m \times n$-matriisi ja olkoon $\boldsymbol{b}$ $m \times 1$-sarakevektori. Nyt on olemassa ratkaisu lineaariselle yhtälöryhmälle $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, jos ja vain jos*

$$\operatorname{rank}(A|\boldsymbol{b}) = \operatorname{rank}(A).$$

Todistus. Olkoot matriisit B ja C matriisien $(A|\boldsymbol{b})$ ja A redusoidut porrasmatriisimuodot. Jos $\operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}(C)$, niin matriiseissa B ja C on yhtä monta nollasta eriävää riviä. Matriisissa B ei siis voi olla olemassa riviä, jonka yksi alkio on erisuuri kuin nolla. Joten yhtälöryhmälle on olemassa ratkaisu.

Jos oletetaan yhtälöryhmän olevan ratkeava, niin matriisissa B ei voi olla riviä, jonka yksi alkio eroaa nollasta. Tällöin matriiseissa B ja C on oltava sama määrä nollarivejä, joten niissä on myös sama määrä nollarivistä eriäviä rivejä. Siis matriisin $(A|\boldsymbol{b})$ ja A asteet ovat samat. [2, s. 154] $\square$

Esimerkki 4.2. Olkoot matriisi $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ja sarakevektori $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Etsitään $\operatorname{rank}(A|\boldsymbol{b})$ ja $\operatorname{rank}(A)$. Koska 2×3-matriisille $A|\boldsymbol{b}$ ei löydetä determinanttia

$$\det(A|\boldsymbol{b}) = \det\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right),$$

niin tarkastellaan alimatriisien determinantteja. Nyt suurin alimatriisi, jolla on nollasta eriävä determinantti on 2×2-matriisi, sillä esimerkiksi

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 = 2 + 1 = 3 \neq 0,$$

joten $\operatorname{rank}(A|\boldsymbol{b}) = 2$. Samalla todistimme, että $\operatorname{rank}(A) = 2$, sillä sen determinantti eroaa nollasta. Joten

$$\operatorname{rank}(A) = 2 = \operatorname{rank}(A|\boldsymbol{b}).$$

Nyt etsimme ratkaisun yhtälöryhmälle

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + y = 3 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x = 3 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Nyt voimme todeta, että yhtälöryhmän ratkaisu löytyi ja sitä vastaavan augmentoidun matriisin aste on sama kuin matriisin A aste.

Esimerkki 4.3. Tarkastellaan esimerkin 4.1 yhtälöryhmää

$$\begin{cases} 5x + 10y - 7z = -2 \\ 2x + 4y - 3z = -1 \\ 3x + 6y + 5z = 9 \end{cases}$$

ja siitä muodostetun augmentoidun matriisin

$$(A|\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 10 & -7 & -2 \\ 2 & 4 & -3 & -1 \\ 3 & 6 & 5 & 9 \end{array}\right)$$

astetta. Totesimme aiemmin, että yhtälöryhmä ei ole ratkeava. Tarkastellaan nyt pitääkö $\operatorname{rank}(A|\boldsymbol{b}) = \operatorname{rank}(A)$ paikkansa.

Koska $\det(A) = 0$, niin tarkastellaan matriisin A 2×2-alimatriiseja. Saadaan

$$\det \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = 4 \cdot 5 - 6 \cdot (-3) = 20 + 18 = 38 \neq 0,$$

joten $\operatorname{rank}(A) = 2$. Etsitään $\operatorname{rank}(A|\boldsymbol{b})$ etsimällä kyseisen matriisin jonkin 3×3-alimatriisin determinantti. Saadaan

$$\det \begin{pmatrix} 5 & -7 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & 5 & 9 \end{pmatrix} = -1,$$

joten $\operatorname{rank}(A|\boldsymbol{b}) = 3$. Nyt on saatu ratkeamattomalle yhtälöryhmälle

$$\begin{cases} 5x + 10y - 7z = -2 \\ 2x + 4y - 3z = -1 \\ 3x + 6y + 5z = 9 \end{cases}$$

$\operatorname{rank}(A|\boldsymbol{b}) \neq \operatorname{rank}(A)$.

Lähteet

[1] Friedberg, Stephen H., Insel, Arnold J., Spence, Lawrence E. *Linear Algebra*. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1979.

[2] Kuttler, K. *Elementary Linear Algebra*. New York: Birch and Star, 2012.

[3] Nicholson, W. Keith *Linear Algebra with Applications*. Toronto, Canada: McGraw-Hill Ryerson, 2003.